

二次関数の文章題・応用

統合教材パック（全 2 問）

このパックで身につけること

- ・「最大・最小を求めよ」という問いに対し、変数設定 → 式化 → 平方完成 → 頂点読みの 4 ステップを実行できる
- ・図形の条件（面積・道幅など）を二次方程式に変換し、解を吟味して現実的な値を選べる
- ・「方程式の解を吟味する」習慣（正の値・定義域内など）を身につける

収録問題

問題	内容	難易度
問 1：収益最大化	仕入れ値 40 円・販売数 $(100 - x)$ 個の利益最大化	標準
問 2：道幅問題	縦 30m× 横 40m の土地に幅 x m の道、面積 875 m^2	標準

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその手順か」・「解の吟味の根拠」を言語化する

問 1 は「頂点が答え（最大）」、問 2 は「方程式を解いて吟味」という文章題の 2 大パターンをそれぞれ扱う。

統合教材：二次関数の文章題・応用（最大値・最小値）

統合教材

トピック：二次関数の文章題・応用難易度：標準

問題

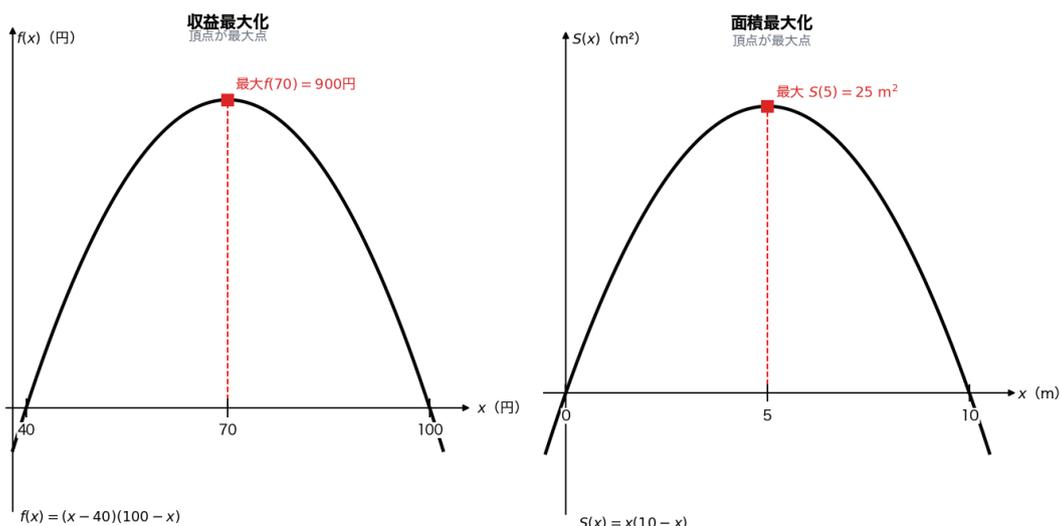
仕入れ値が1個40円の商品がある。1個 x 円で売ると1日の販売数が $(100 - x)$ 個になるとする ($40 < x < 100$)。1日の総利益を最大にする販売価格と、そのときの最大利益を求めよ。

解法の流れ

- 1日の総利益を x の式で表す： $f(x) = (x - 40)(100 - x)$
- 平方完成して頂点の座標を求める
- 頂点が定義域内にあることを確認し、最大値を読む

方針

最大化したい量（利益）を変数 x （価格）の式で表すと、上に凸の放物線になる。放物線の頂点が最大値を与える点であり、頂点の x 座標が最適価格、 y 座標が最大利益となる。



模範解答

1 日の総利益 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - 40)(100 - x) \\ &= -x^2 + 140x - 4000 \end{aligned}$$

平方完成すると

$$f(x) = -(x - 70)^2 + 900$$

$a = -1 < 0$ より上に凸。頂点 $(70, 900)$ 。

$x = 70$ は $40 < x < 100$ を満たす。

∴ 価格 $x = 70$ 円するとき最大利益900 円

【変数設定の確認】

1 個の利益 = $x - 40$ (販売価格 - 仕入れ値)

販売数 = $100 - x$ (問題文の設定)

どちらも $x > 40$ かつ $100 - x > 0$ なので定義域は $40 < x < 100$

【頂点が最大になる理由】

$a < 0$ の放物線はグラフが下向き (山型)。定義域内で頂点が最も高い点。頂点の x が定義域外なら端点を調べるが、この問題では範囲内にある。

【別問：面積最大化】

周長 20m のロープで長方形を作る：縦 x 、横 $10 - x$ とおくと

$$S(x) = -(x - 5)^2 + 25$$

最大面積 25 m² (縦 = 横 = 5m の正方形)

統合教材：二次関数の文章題・応用（図形問題）

統合教材

トピック：二次関数の文章題・応用難易度：標準

問題

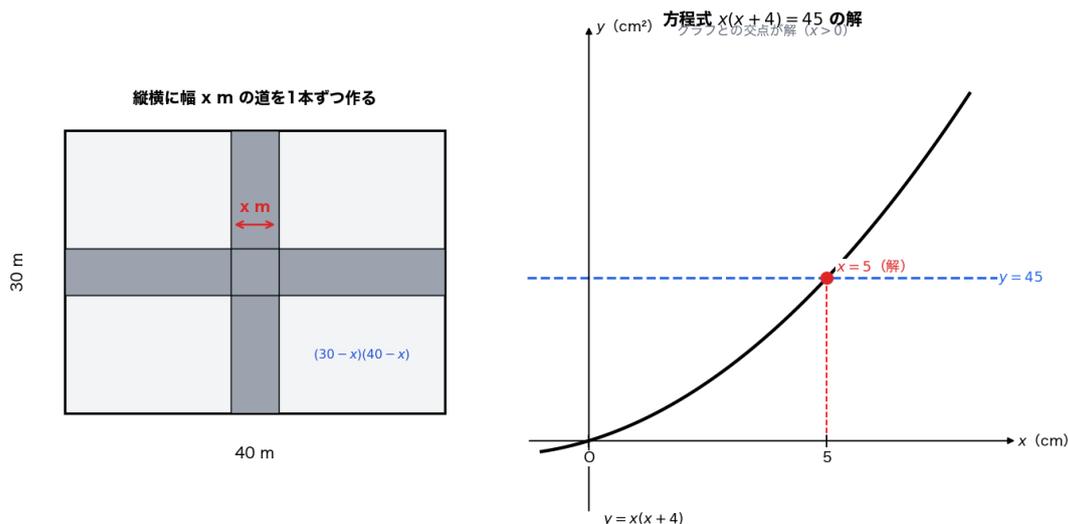
縦 30m、横 40m の長方形の土地に、幅 x m の道路を縦横に 1 本ずつ作ったところ、道路を除いた面積が 875 m^2 になった。道幅 x を求めよ。

解法の流れ

- 道を除いた面積を x の式で表す： $S(x) = (30 - x)(40 - x)$
- $S(x) = 875$ として方程式を立てる
- 因数分解して解を求め、条件 ($0 < x < 30$) で吟味する

方針

道幅 x を変数とし、道を除いた縦・横の長さをそれぞれ x で表す。面積の等式条件から二次方程式を立て、解を求めた後、実際の文脈で意味を持つ値（正かつ土地より小さい）のみを採用する。



模範解答

道を除いた縦・横の長さはそれぞれ
 縦 = $30 - x$ (m)、横 = $40 - x$ (m)
 面積の条件より

$$(30 - x)(40 - x) = 875$$

$$x^2 - 70x + 1200 = 875$$

$$x^2 - 70x + 325 = 0$$

$$(x - 5)(x - 65) = 0$$

$$x = 5 \quad \text{または} \quad x = 65$$

道幅は $0 < x < 30$ を満たす必要があるから
 $x = 65$ は不適。

$$\therefore x = 5(\text{m})$$

【模式図の読み方】

縦道（幅 x ）と横道（幅 x ）が土地を分割する。道を除くと残りの縦は $30 - x$ 、横は $40 - x$ になる。

【確認】

$$(30 - 5)(40 - 5) = 25 \times 35 = 875 \quad \checkmark$$

【別問：長方形問題】

縦が横より 4cm 長く、面積が 45 cm^2 の長方形:

$$\text{横を } x \text{ とすると } x(x + 4) = 45$$

$$x^2 + 4x - 45 = (x + 9)(x - 5) = 0$$

$$x = 5 \quad (x > 0 \text{ より})$$

$$\text{横 } 5 \text{ cm、縦 } 9 \text{ cm} \quad \checkmark$$