二次方程式の解の配置

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 放物線の形と位置から、解の配置を 3 条件または 1 条件で読み取れる
- $f(0)$ の符号が「2 解が同符号か異符号か」を 1 本で決める仕組みを説明できる
- 2 解がともに区間内に入るための 3 条件（判別式・端点・軸）の役割を区別できる
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ が「解が区間を挟む」条件として十分な理由を言える

収録問題

問題	内容	難易度
問 1：2 解が同符号	$x^2 + (a-3)x + a = 0$ で 2 解ともに正・ともに負	標準
問 2：2 解が異符号	$x^2 + ax + a - 3 = 0$ で 2 解が異符号	標準
問 3：2 解がともに区間内	$x^2 - 4x + a = 0$ で 2 解ともに $(0, 3)$ 内	標準
問 4：解が区間を挟む	$x^2 - 4x + a = 0$ で解が $(0, 3)$ を挟む	標準

使い方

1.「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその条件か」を言語化する

問 3 と問 4 は同じ放物線 $x^2 - 4x + a = 0$ を使い、条件が変わると答えと計算量がどう変わるかを比較できる構成になっている。

統合教材：解の配置（2 解が同符号）

統合教材

トピック: 二次関数の解の配置難易度: 標準

問題

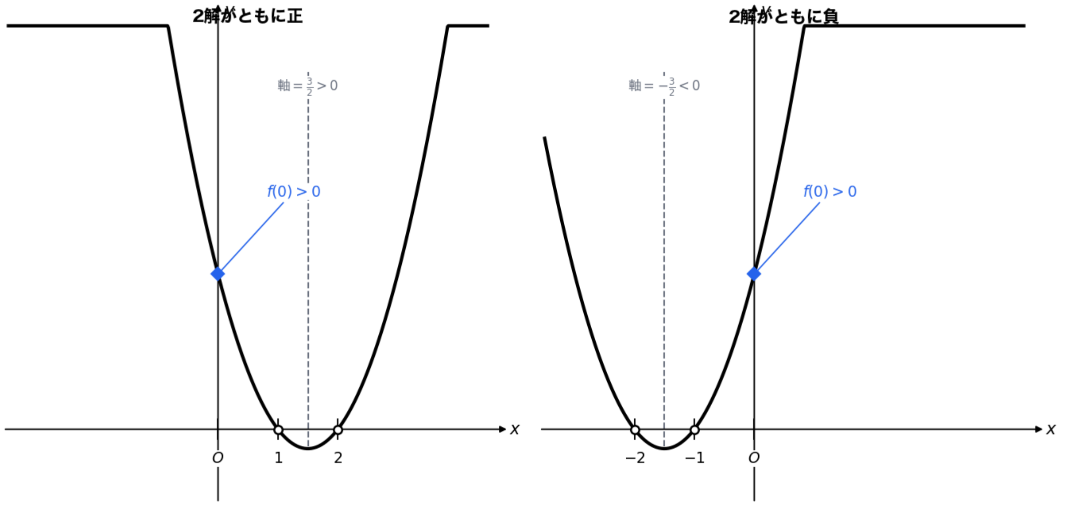
方程式 $x^2 + (a-3)x + a = 0$ について答えよ。
（1）2 解がともに正となる実数 a の範囲を求めよ。
（2）2 解がともに負となる実数 a の範囲を求めよ。

解法の流れ

- $f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ と置き、放物線の位置条件を 3 条件で設定する
- 判別式 $D \geq 0$（実数解が 2 つある）、$f(0) > 0$（$x = 0$ が 2 解の外側）、軸の位置（正か負か）の 3 条件を連立する
- （1）は軸 > 0、（2）は軸 < 0 として解く

方針

$f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ の放物線（上に凸）が「正の側に 2 点で x 軸と交わる」ためには、**実数解の存在・$x = 0$ が外側・軸が正**の 3 条件がすべて必要。「ともに負」は軸の符号だけが逆転する対称構造をもつ。



模範解答

$f(x) = x^2 + (a-3)x + a$ とおく。軸は $x = \dfrac{3-a}{2}$、$f(0) = a$ である。

【3 条件の役割】
$D \geq 0$ は「放物線が x 軸に届く」ことが必要。
$f(0) > 0$ は「$x = 0$ での y 値が正 → $x = 0$ は 2 解の外側」を保証。
軸 > 0 は「2 解の中点が正の側」すなわち「2 解がともに正の方向にある」ことを保証。
3 条件が揃ってはじめて「2 解が正の側に 2 つある」ことが確定する。

(1) 2 解がともに正

3 条件をそれぞれ立てる。

$$D = (a-3)^2 - 4a = (a-1)(a-9) \geq 0$$

$$\therefore\ a \leq 1 \text{ または} a \geq 9$$

$$f(0) = a > 0$$

$$\frac{3-a}{2} > 0 \implies a < 3$$

共通部分をとると

$$\boxed{0 < a \leq 1}$$

【ともに負の構造】
「ともに負」は「2 解が負の側に 2 つある」ことを表す。
$f(0) > 0$ の意味は変わらない（$x = 0$ が 2 解の外側）。しかし今度は 2 解が $x < 0$ の側にあるので、軸 (2 解の中点) も負でなければならない。
（1）と（2）は軸の不等号だけが逆という対称な構造をもつ。

(2) 2 解がともに負

$D \geq 0$ と $f(0) = a > 0$ は（1）と同じ。軸の向きが逆になる。

$$\frac{3-a}{2} < 0 \implies a > 3$$

3 条件の共通部分：

$$(a \leq 1 \text{ または} a \geq 9) \cap (a > 0) \cap (a > 3)$$

$$\boxed{a \geq 9}$$

統合教材：解の配置（2 解が異符号）

統合教材

トピック: 二次関数の解の配置難易度: 標準

問題

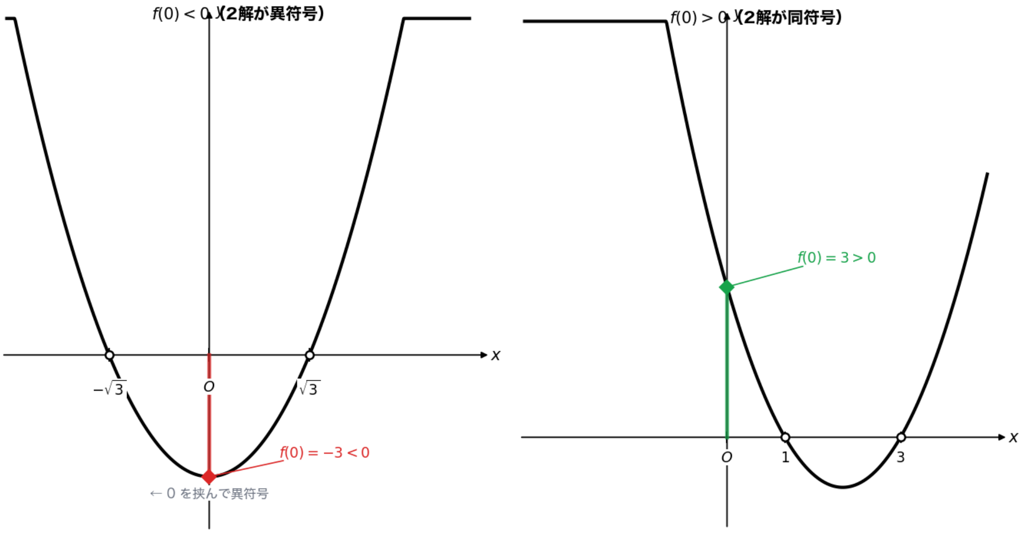
方程式 $x^2+ax+a-3=0$ の 2 解が異符号（一方が正、他方が負）となる実数 a の範囲を求めよ。

解法の流れ

- $f(x)=x^2+ax+a-3$ と置く
- 「2 解が異符号」は「$x=0$ を挟んで左右に 1 解ずつある」ことと同値
- 放物線が x 軸の正の側と負の側に 1 解ずつ交わるとき、必ず $x=0$ で x 軸と交差する
- すなわち $f(0)<0$ が成り立てばよい（判別式・軸の条件は不要）

方針

$f(0)$ の符号が解の「異符号性」を 1 本で決める。上に凸の放物線が $x=0$ で x 軸より下にあるとき、放物線は必ず $x=0$ の左側と右側にそれぞれ 1 つずつ実数解を持つ。逆に $f(0)\geq 0$ なら「0 を挟まない配置」になる。判別式の条件 $D\geq 0$ は $f(0)<0$ から自動的に保証されるため、追加する必要はない。



模範解答

【なぜ 1 条件だけか】
$f(0) < 0$ が成り立つとき、放物線は $x = 0$ で x 軸より下にある。上に凸の放物線がある点で負の値をとれば、そこより左と右の遠方（$x \to \pm\infty$ で $f(x) \to +\infty$）との間に必ず 1 つずつ零点が存在する。
したがって $f(0) < 0$ だけで「実数解が 2 つあること（$D \geq 0$）」と「0 の左右に 1 解ずつ」の両方が同時に確定する。
【f(0) の計算】
$f(0)$ は定数項そのものである。
$f(x) = x^2 + ax + (a - 3)$ の定数項は $a - 3$。
よって $f(0) = a - 3$。

$f(x) = x^2 + ax + a - 3$ とおく。
$f(0) = a - 3$
2 解が異符号となる条件は

$$f(0) < 0$$

$$a - 3 < 0$$

$$\boxed{a < 3}$$

統合教材：解の配置（2 解がともに区間内）

統合教材

トピック: 二次関数の解の配置難易度: 標準

問題

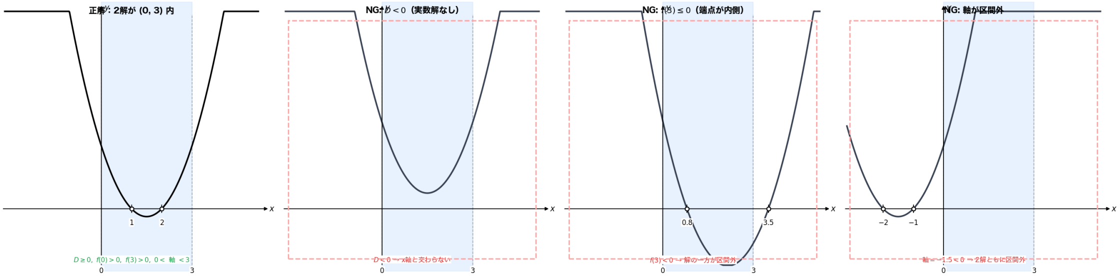
方程式 $x^2 - 4x + a = 0$ の 2 解がともに区間 $(0,\ 3)$ 内に入る実数 a の範囲を求めよ。

解法の流れ

- $f(x) = x^2 - 4x + a$ と置き、軸は $x = 2$、$f(0) = a$、$f(3) = a - 3$
- 4 条件を立てる：判別式 $D \geq 0$、$f(0) > 0$、$f(3) > 0$、$0 <$ 軸 < 3
- 軸 $= 2$ は自動的に $0 < 2 < 3$ を満たすので、3 条件の連立に帰着する
- 3 不等式の共通部分をとって答えを得る

方針

2 解がともに区間 (α, β) 内にある条件は「判別式・端点での正値・軸が区間内」の 4 条件が必要。本問は軸 $= 2$ が固定されており自動的に $0 < 2 < 3$ を満たすため、残り 3 条件の連立になる。$D \geq 0$ が $a \leq 4$ を与え、$f(0) > 0$ が $a > 0$、$f(3) > 0$ が $a > 3$ を与える。最も強い下限は $a > 3$ で、上限が $a \leq 4$ により答えは $3 < a \leq 4$ となる。



模範解答

【3 条件それぞれの役割】
$D \geq 0$ は「放物線が x 軸に届く＝実数解が 2 つある」ことが前提。
$f(0) > 0$ は「$x = 0$ での y 値が正 → $x = 0$ は 2 解の外側（左外）」を保証。
$f(3) > 0$ は「$x = 3$ は 2 解の外側（右外）」を保証。
軸が $(0, 3)$ 内にあることは「2 解の中点が区間内」を意味し、左右どちらかに偏った不正な配置を排除する。
【軸が自動確定する理由】
$f(x) = x^2 - 4x + a$ の軸は係数だけで決まり、$x = 2$。
a によらず常に $0 < 2 < 3$ が成り立つため、軸の条件は追加の不等式を生まない。

$f(x) = x^2 - 4x + a$ とおく。軸は $x = 2$。
4 条件をそれぞれ立てる。

$$D = 16 - 4a \geq 0 \implies a \leq 4$$

$$f(0) = a > 0$$

$$f(3) = 9 - 12 + a = a - 3 > 0 \implies a > 3$$

軸 $= 2$ は $0 < 2 < 3$ を自動的に満たす。
4 条件の共通部分：

$$(a \leq 4) \cap (a > 0) \cap (a > 3)$$

$$\boxed{3 < a \leq 4}$$

統合教材：解の配置（解が区間を挟む）

統合教材

トピック: 二次関数の解の配置難易度: 標準

問題

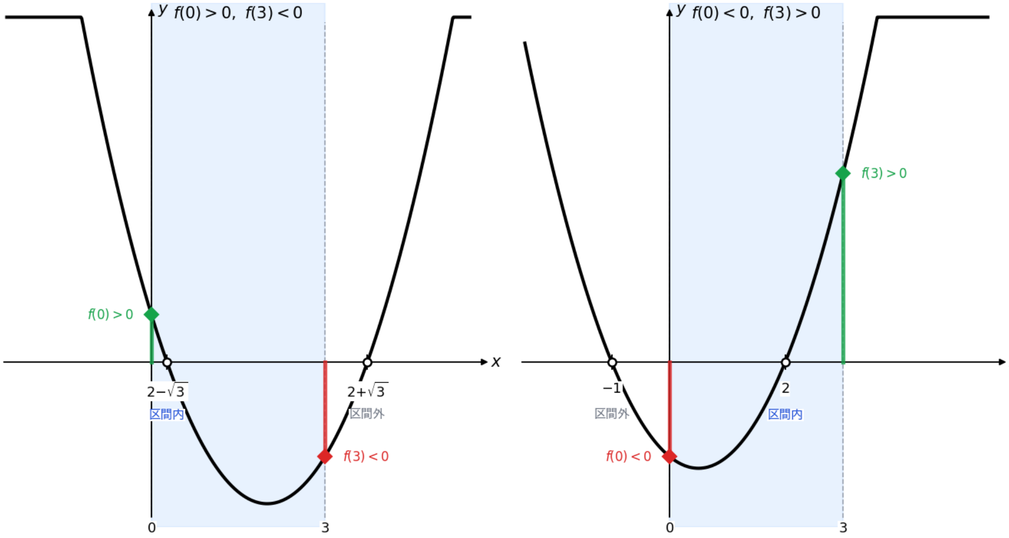
方程式 $x^2 - 4x + a = 0$ が、区間 $(0,\ 3)$ の内側と外側に 1 解ずつ持つ実数 a の範囲を求めよ。

解法の流れ

- $f(x) = x^2 - 4x + a$ と置き、$f(0) = a$、$f(3) = a - 3$ を計算する
- 「解が区間 $(0, 3)$ を挟む」は $f(0) \cdot f(3) < 0$ の 1 条件で決まる
- 積の符号から $a(a - 3) < 0$ を立てて解く

方針

連続な放物線が $x = 0$ と $x = 3$ で異符号の値をとるならば、中間値の定理により区間 $(0, 3)$ 内に必ず零点が存在する。同時に外側にも零点がある（二次方程式の解は合わせて 2 つ）。よって「解が区間を挟む」は $f(0) \cdot f(3) < 0$ だけで確定し、判別式・軸の条件は一切不要である。前問（2 解がともに区間内、3 条件必要）と対比することで、1 条件で決まる理由が際立つ。



模範解答

【なぜ 1 条件で足りるか】

$f(0)\cdot f(3)<0$ が成り立つとき：

- $f(0)$ と $f(3)$ が異符号 → 中間値の定理より $(0,3)$ 内に解が 1 つ
- 二次方程式の解は全部で 2 つあるが、1 つは $(0,3)$ 内に確定しているので、もう 1 つは必ず区間外

これで「内側に 1 解・外側に 1 解」が完全に確定する。

判別式 $D\geq 0$ は $f(0)\cdot f(3)<0$ から自動保証される（積が負なら実数解が 2 つある）。軸の位置も問わない。

【前問との比較】

前問（2 解がともに区間内）：答え $3<a\leq 4$、3 条件が必要。

本問(解が区間を挟む): 答え $0<a<3$、1 条件で足りる。

同じ放物線 $f(x)=x^2-4x+a$ で、条件が変わると答えと計算量がどう変わるかを比較できる。

$f(x)=x^2-4x+a$ とおく。

$$f(0)=a,\quad f(3)=a-3$$

解が区間 $(0,3)$ を挟む条件は

$$f(0)\cdot f(3)<0$$

$$a(a-3)<0$$

$$\boxed{0<a<3}$$