二次関数の最大値・最小値

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 上に凸の放物線が変化するとき、最小値・最大値の求め方を場合分けで整理できる
- 区間が固定／移動する 2 パターンの場合分け法を使い分けられる
- 「最小値は軸の位置（3 ケース）、最大値は軸と端点の距離（2 ケース）」という構造を対比で理解できる

収録問題

問題	区間・軸の設定	難易度
問 1：最小値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・3 ケース	標準
問 2：最大値（固定区間）	区間 $0 \leq x \leq 1$ 固定・軸が動く・2 ケース	標準
問 3：最小値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・3 ケース	応用
問 4：最大値（動く区間）	区間 $a \leq x \leq a+1$ が動く・軸固定・2 ケース	応用

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 3・問 4 は同一関数・同一区間設定。最小値は 3 ケース、最大値は 2 ケースになる理由を問 3 との対比で確認すること。

 統合教材

統合教材：二次関数の最小値（軸が動く・固定区間）

統合教材

トピック: 二次関数の最大値・最小値（区間一定・軸が動く）難易度: 標準

問題

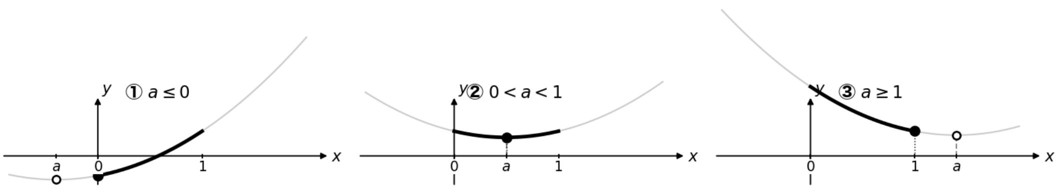
$0 \leq x \leq 1$ において、$f(x) = x^2 - 2ax + 2a$ の最小値を求めよ。

解法の流れ

- $f(x) = (x-a)^2 + 2a - a^2$ と平方完成し、軸 $x = a$・頂点 $(a,\, 2a - a^2)$ を確認する
- 軸 $x = a$ が $0 \leq x \leq 1$ のどこにあるかで ① $a \leq 0$、② $0 < a < 1$、③ $a \geq 1$ に場合分けする
- 各ケースで最小点（端点または頂点）を読み取り、最小値と a の範囲をまとめる

方針

$f(x)$ は上に凸の放物線で、軸は $x = a$。軸が $0 \leq x \leq 1$ の左側・内部・右側のどこにあるかで最小点の位置が決まる。3 ケースの様子を下図で確認してから答案に入る。



模範解答

【軸の位置で場合分け】
上に凸の放物線では軸 $x = a$ に最も近い点が最小値を与える。軸が左側・内部・右側の 3 通りで最小点の位置が変わる。

$f(x) = (x-a)^2 + 2a - a^2$ であるから、軸は $x = a$、頂点は $(a,\, 2a - a^2)$。
軸 $x = a$ が $0 \leq x \leq 1$ のどこにあるかで場合分けする。

【各ケースの読み取り方】
方針の図を参照。軸より右では増加・左では減少なので：① はこの範囲全体が軸の右 → 単調増加 → 左端が最小。② は頂点が範囲内 → 頂点値が最小。③ はこの範囲全体が軸の左 → 単調減少 → 右端が最小。
境界の整合：$a = 0$ で ①② ともに 0、$a = 1$ で ②③ ともに 1。

① $a \leq 0$ のとき
軸 $x = a \leq 0$ は $0 \leq x \leq 1$ の左側にある。よって $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で単調増加であるから、最小値 $f(0) = 2a$。

② $0 < a < 1$ のとき
軸 $x = a$ が 0 と 1 の間にあるから、頂点が最小値を与える。最小値 $f(a) = a(2-a)$。

③ $a \geq 1$ のとき
軸 $x = a \geq 1$ は $0 \leq x \leq 1$ の右側にある。よって $f(x)$ は $0 \leq x \leq 1$ で単調減少であるから、最小値 $f(1) = 1$。

したがって、最小値は

$$\begin{cases} 2a & (a \leq 0) \\ a(2-a) & (0 < a < 1) \\ 1 & (a \geq 1) \end{cases}$$

統合教材：二次関数の最大値（軸が動く・固定区間）

統合教材

トピック: 二次関数の最大値・最小値（区間一定・軸が動く）難易度: 標準

問題

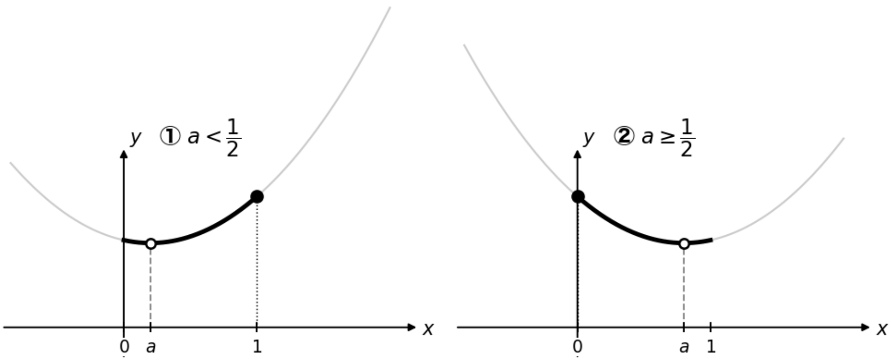
$0 \leq x \leq 1$ において、$f(x) = x^2 - 2ax + a + 1$ の最大値を求めよ。

解法の流れ

- $f(x) = (x-a)^2 + 1 + a - a^2$ と平方完成し、軸 $x = a$ を確認する
- 上に凸の放物線では「軸から最も遠い端点」で最大値をとることに注目する
- 軸の位置（$a < \frac{1}{2}$ / $a \geq \frac{1}{2}$）で 2 ケースに分けて最大値を求める

方針

放物線は上に凸であるから、軸 $x = a$ から最も遠い端点が最大値を与える。$0 \leq x \leq 1$ の中点は $x = \frac{1}{2}$ であるから、軸が中点より左（$a < \frac{1}{2}$）なら右端 $x = 1$、中点より右（$a \geq \frac{1}{2}$）なら左端 $x = 0$ が最大値の点。



模範解答

【最大値は「軸から遠い端点」】
頂点（軸）は最小を与える。端点のうち軸から遠い方が最大値の点。$0 \leq x \leq 1$ の中点 $\dfrac{1}{2}$ と軸を比べることで左右どちらが遠いか判断できる。

$f(x) = (x-a)^2 + 1 + a - a^2$ であるから、軸は $x = a$。
放物線は上に凸であるから、軸から最も遠い端点で最大値をとる。

【2 ケースの判断基準と整合確認】
中点 $\dfrac{1}{2}$ との大小が判断の根拠。$a < \dfrac{1}{2}$ では $|1-a| > |0-a|$ なので右端が遠い。境界 $a = \dfrac{1}{2}$ では $2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ で一致。

① $a < \dfrac{1}{2}$ のとき
軸 $x = a$ は $0 \leq x \leq 1$ の中点より左にあるから、右端 $x = 1$ が軸から遠い。
よって最大値は $f(1) = 1 - 2a + a + 1 = 2 - a$。
② $a \geq \dfrac{1}{2}$ のとき
軸 $x = a$ は $0 \leq x \leq 1$ の中点より右（または中点）にあるから、左端 $x = 0$ が軸から遠い。
よって最大値は $f(0) = a + 1$。
したがって、最大値は

$$\begin{cases} 2 - a & \left(a < \dfrac{1}{2}\right) \\ a + 1 & \left(a \geq \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

統合教材：二次関数の最小値（軸が固定・区間が動く）

統合教材

トピック: 二次関数の最大値・最小値（区間が動く・軸固定）難易度: 応用

問題

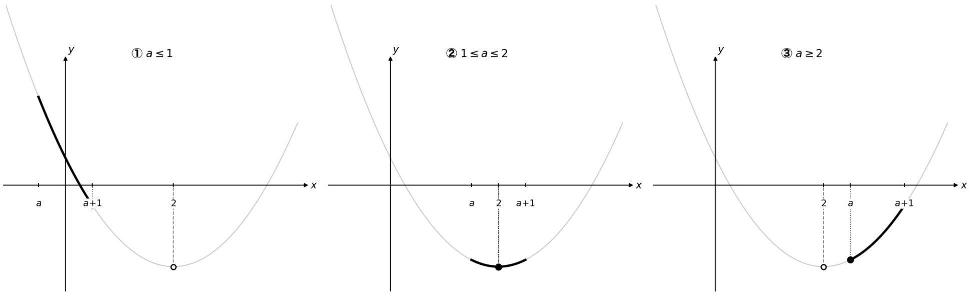
$a \leq x \leq a+1$ において、$g(x) = x^2 - 4x + 1$ の最小値を求めよ。

解法の流れ

- $g(x) = (x-2)^2 - 3$ と平方完成し、軸 $x = 2$・頂点 $(2, -3)$ を確認する
- 固定軸 $x = 2$ と $a \leq x \leq a+1$ の範囲の位置関係で ① $a \leq 1$、② $1 \leq a \leq 2$、③ $a \geq 2$ に場合分けする
- 各ケースで最小点（端点または頂点）を求め、a の範囲とともにまとめる

方針

軸 $x = 2$ は固定で、$a \leq x \leq a+1$ の範囲が動く。右端 $a+1$ と左端 a が軸に対して左側・内部・右側かを判断して場合分けする。



模範解答

【軸固定・範囲動く型の場合分け】
軸の位置は変わらず、範囲が移動する。判断基準は「右端 $a+1$ が軸 2 以下か」と「左端 a が軸 2 以上か」。

$g(x)=(x-2)^2-3$ であるから、軸は $x=2$、頂点は $(2,\,-3)$。
軸 $x=2$ と $a \leq x \leq a+1$ の範囲の位置関係で場合分けする。

【各ケースの読み取りと整合確認】
方針の図を参照。軸より左で減少・右で増加なので：① はこの範囲全体が軸の右 → 単調減少 → 右端が最小。② は軸が範囲内 → 頂点値。③ はこの範囲全体が軸の左 → 単調増加 → 左端が最小。
境界の整合：$a=1$ で ①② ともに -3、$a=2$ で ②③ ともに -3。

① $a \leq 1$ のとき
軸は $a \leq x \leq a+1$ の範囲の右側にある。$g(x)$ は単調減少であるから、最小値は

$$g(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)+1=a^2-2a-2$$

② $1 \leq a \leq 2$ のとき
軸 $x=2$ が a と $a+1$ の間にあるから、頂点が最小値。最小値は $g(2)=-3$。
③ $a \geq 2$ のとき
軸は $a \leq x \leq a+1$ の範囲の左側にある。$g(x)$ は単調増加であるから、最小値は

$$g(a)=a^2-4a+1$$

したがって、最小値は

$$\begin{cases} a^2-2a-2 & (a \leq 1) \\ -3 & (1 \leq a \leq 2) \\ a^2-4a+1 & (a \geq 2) \end{cases}$$

統合教材：二次関数の最大値（軸が固定・区間が動く）

統合教材

トピック: 二次関数の最大値・最小値（区間が動く・軸固定）難易度: 応用

問題

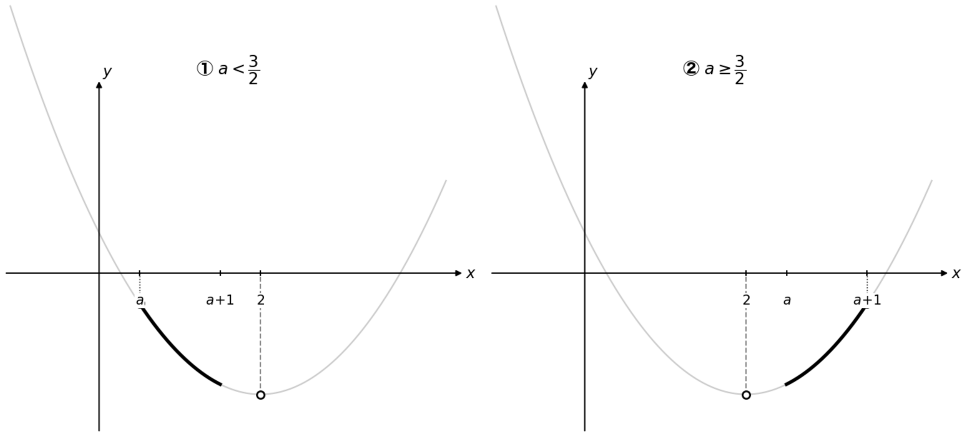
$a \leq x \leq a+1$ において、$g(x) = x^2 - 4x + 1$ の最大値を求めよ。

解法の流れ

- $g(x) = (x-2)^2 - 3$ と平方完成し、軸 $x = 2$・頂点 $(2, -3)$ を確認する
- 上に凸の放物線では「軸から最も遠い端点」が最大値を与える
- 左端 $x = a$ と右端 $x = a+1$ の軸 $x = 2$ からの距離を比べ、境界 $a = \dfrac{3}{2}$ で 2 ケースに分けて最大値を求める

方針

放物線は上に凸であるから、軸 $x = 2$ から最も遠い端点が最大値を与える。左端の距離 $|a-2|$ と右端の距離 $|a-1|$ が等しくなるのは $a = \dfrac{3}{2}$ のとき。



模範解答

【軸固定・範囲動く型の最大値】
最大値は「軸 $x=2$ から最も遠い端点」で達成される。左端の距離 $|a-2|$ と右端の距離 $|a-1|$ を比べると境界は $a=\dfrac{3}{2}$。（問 3 の最小値と同じ設定で、判断基準が「最近」から「最遠」に変わる。）

$g(x)=(x-2)^2-3$ であるから、軸は $x=2$、頂点は $(2,\,-3)$。
放物線は上に凸であるから、軸から最も遠い端点で最大値をとる。左端 $x=a$ と右端 $x=a+1$ の軸 $x=2$ からの距離で場合分けする。

【各ケースの読み取りと整合確認】
方針の図を参照。① は左端が軸から遠い（$|a-2|>|a-1|$）→ 左端が最大。② は右端が軸から遠い（$|a-1|>|a-2|$）→ 右端が最大。
境界の整合：$a=\dfrac{3}{2}$ で ①② ともに $-\dfrac{11}{4}$。

① $a<\dfrac{3}{2}$ のとき
左端 $x=a$ が軸から遠いから、最大値は

$$g(a)=a^2-4a+1$$

② $a\geq\dfrac{3}{2}$ のとき
右端 $x=a+1$ が軸から遠いから、最大値は

$$g(a+1)=(a+1)^2-4(a+1)+1=a^2-2a-2$$

したがって、最大値は

$$\begin{cases} a^2-4a+1 & \left(a<\dfrac{3}{2}\right) \\ a^2-2a-2 & \left(a\geq\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}$$