二次不等式の解法

統合教材パック（全 4 問）

このパックで身につけること

- 放物線と x 軸の位置関係から、$f(x) > 0$・$f(x) < 0$ の解を図で読み取れる
- 判別式の符号（D>0・D=0・D<0）が解の構造をどう変えるかを整理できる
- $a < 0$ のとき解の内外が逆転する理由を放物線の向きから説明できる
- 連立不等式を「各不等式を解いて共通部分を取る」手順で正確に解ける

収録問題

問題	内容	難易度
問 1：基本（a>0, D>0）	$x^2 - x - 6 > 0$ および $x^2 - x - 6 < 0$ を解く	標準
問 2：判別式（D=0・D<0）	D=0・D<0 の場合の解の構造を確認する	標準
問 3：負の係数（a<0）	$-x^2 + x + 2 > 0$ を解く・内外の逆転	標準
問 4：連立二次不等式	2 つの不等式を同時に解く・共通部分	標準

使い方

1.「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその解き方か」を言語化する

問 1〜問 3 は共通の式 $x^2 - x - 6$ を出発点とし、条件の違いで解の構造がどう変わるかを問 4 の連立まで一貫して追える構成になっている。

統合教材：二次不等式の基本（a>0, D>0）

統合教材

トピック: 二次不等式の解法難易度: 標準

問題

次の不等式を解け。

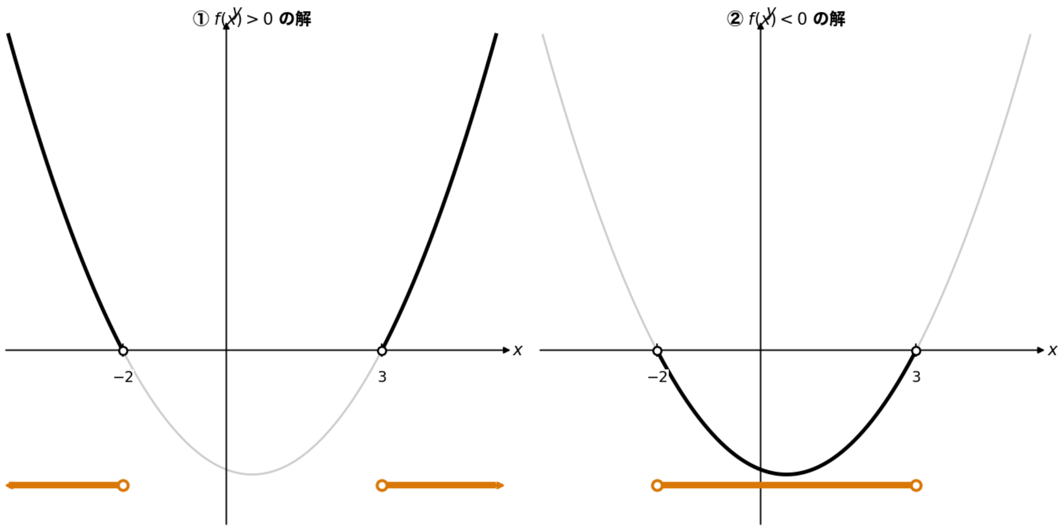
$$(1)\quad x^2 - x - 6 > 0 \qquad (2)\quad x^2 - x - 6 < 0$$

解法の流れ

- $f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ と因数分解し、方程式 $f(x) = 0$ の根（解）$x = -2, 3$ を求める
- 二次係数 $a = 1 > 0$ より放物線は上に凸であり、根の外側で x 軸より上、内側で x 軸より下になることを確認する
- $f(x) > 0$（x 軸より上）の解は根の外側、$f(x) < 0$（x 軸より下）の解は根の内側として読み取る

方針

$f(x) = x^2 - x - 6$ は $a = 1 > 0$ の上に凸の放物線。根 $x = -2, 3$ で x 軸と交わる。上に凸の放物線は根の外側ほど高くなるため、根の外側で x 軸より上、内側で x 軸より下になる。「$f(x) > 0$」=「放物線が x 軸より上の範囲」として解を読み取る。



模範解答

【なぜ因数分解するか】
二次不等式の解の境目は $f(x) = 0$ の根であり、その位置を特定することが第一歩。因数分解により根 $x = -2, 3$ を求める。

$f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ であるから、
方程式 $f(x) = 0$ の根（解）は $x = -2, 3$。
$a = 1 > 0$ より放物線は上に凸。

【外側・内側の判断】
上に凸（$a > 0$）の放物線は根と根の間が最も低くなるため、内側で x 軸より下、外側で x 軸より上になる。方針の図で視覚的に確認できる。$f(x) > 0$ は根の外側の 2 つの半直線、$f(x) < 0$ は根の内側の区間が解。

(1) $f(x) > 0$ の解
放物線が x 軸より上にある範囲は根の外側。

$$x < -2 \quad \text{または} \quad x > 3$$

(2) $f(x) < 0$ の解
放物線が x 軸より下にある範囲は根の内側。

$$-2 < x < 3$$

統合教材：二次不等式（D=0・D<0 のとき）

統合教材

トピック: 二次不等式の解法難易度: 標準

問題

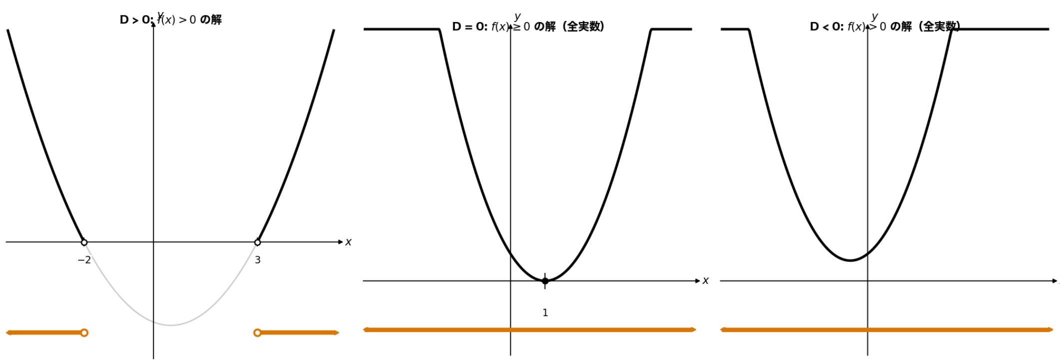
$a > 0$ の場合について、判別式の符号別に次の不等式を解け。
(D=0 のとき）$x^2 - 2x + 1 \geq 0$ および $x^2 - 2x + 1 \leq 0$
(D<0 のとき）$x^2 + x + 1 > 0$ および $x^2 + x + 1 < 0$

解法の流れ

- 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号が「放物線が x 軸と何回交わるか」を決めることを確認する
- D=0 のとき、$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ と平方完成し、重根 $x = 1$ で x 軸に接することを示す
- D<0 のとき、$x^2 + x + 1$ を平方完成して頂点の y 座標が正であることを確認し、解の構造を導く

方針

D>0 では放物線が x 軸を 2 点で横切り根の内外で解が決まる。D=0 では放物線が 1 点で x 軸に接し「下に潜る」部分がないため $f < 0$ の解が存在しない。D<0 では放物線全体が x 軸より上にあり $f < 0$ の解が存在しない。方針の図で 3 ケースの違いを確認してから答案に入る。



模範解答

【D=0 のとき f<0 の解がない理由】
$(x-1)^2$ は $x=1$ で 0 となり、それ以外は必ず正。放物線が x 軸に接するだけで下に潜らないため、$f<0$ となる x は存在しない。

D=0 のとき：$f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$
$D=4-4=0$ より、放物線の頂点は $(1,0)$ で x 軸に接する。
$(x-1)^2 \geq 0$ は常に成り立つから、
$f(x) \geq 0$ の解：すべての実数（$x=1$ で等号成立）
$f(x) \leq 0$ の解：$x=1$ のみ
$f(x)>0$ の解：$x<1$ または $x>1$
$f(x)<0$ の解：解なし

【D<0 のとき放物線が x 軸より上に完全に位置する理由】
平方完成により頂点の y 座標が $\frac{3}{4}>0$ であることが確認できる。x 軸と交わる点がないため、$f(x)$ が負になる実数 x は存在しない。

D<0 のとき：$f(x)=x^2+x+1$
$D=1-4=-3<0$ であるから放物線は x 軸と交わらない。

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

頂点 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ で放物線全体が x 軸より上にある。
$f(x)>0$ の解：すべての実数
$f(x)<0$ の解：解なし

統合教材：二次不等式（a<0 のとき）

統合教材

トピック: 二次不等式の解法難易度: 標準

問題

次の不等式を解け。

$$-x^2 + x + 2 > 0$$

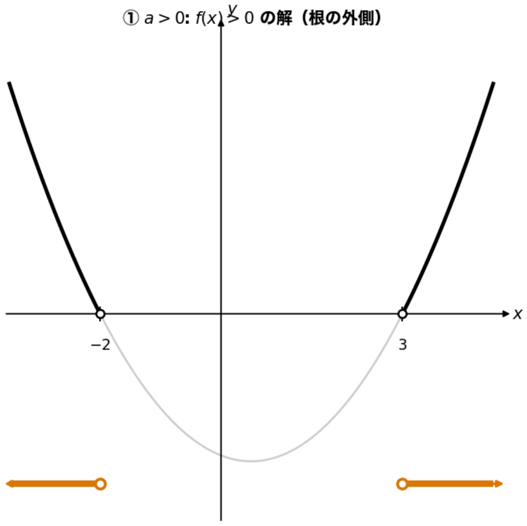
解法の流れ

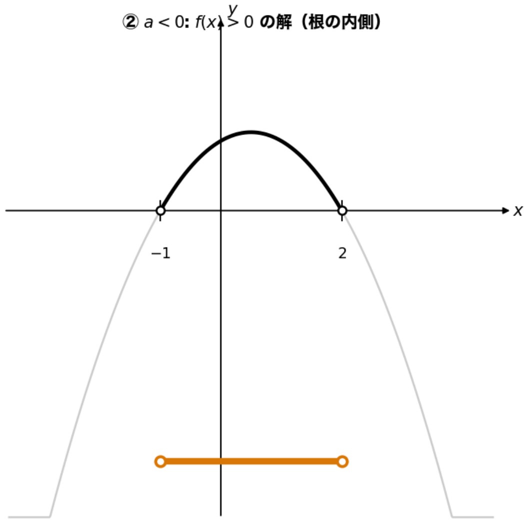
- 二次係数 $a = -1 < 0$ を確認する。放物線は下に凸（逆 U 字型）になる
- 方程式 $f(x) = 0$ について両辺を -1 で割り、$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = 0$ を解いて根（解）$x = -1, 2$ を求める
- $a < 0$ の下に凸の放物線では根の内側で x 軸より上になるため、$f(x) > 0$ の解は根の内側

方針

$f(x) = -x^2 + x + 2$ は $a = -1 < 0$ の下に凸の放物線。根 $x = -1, 2$ で x 軸と交わり、根の内側（$-1 < x < 2$）で x 軸より上になる。$a > 0$ の場合と解の内外関係が逆転することを、方針の図で確認してから答案に入る。

 統合教材





模範解答

> **【a<0 を最初に確認する理由】**
> 放物線の向き（上に凸か下に凸か）が「どの範囲で $f(x)$ が正か」を決める。a の符号を最初に確認することで、以降の読み取りの方向が定まる。

$a = -1 < 0$ より放物線は下に凸。
方程式 $f(x) = 0$ の根（解）を求める。

$$-x^2+x+2 = 0 \iff x^2-x-2 = 0 \iff (x-2)(x+1) = 0$$

よって、根（解）は $x = -1,\ 2$。

> **【なぜ内側が解になるか】**
> $a > 0$（上に凸）では根の外側が x 軸より上になるのに対し、$a < 0$（下に凸）では根の内側が x 軸より上になる。放物線の向きが逆転することで解の範囲もちょうど逆転する。方針の図で 2 つの放物線を比較するとよい。

下に凸の放物線は根の内側で x 軸より上にある。
よって $f(x) > 0$ の解は根の内側：

$$-1 < x < 2$$

統合教材：連立二次不等式

統合教材

トピック: 二次不等式の解法難易度: 標準

問題

次の連立不等式を解け。

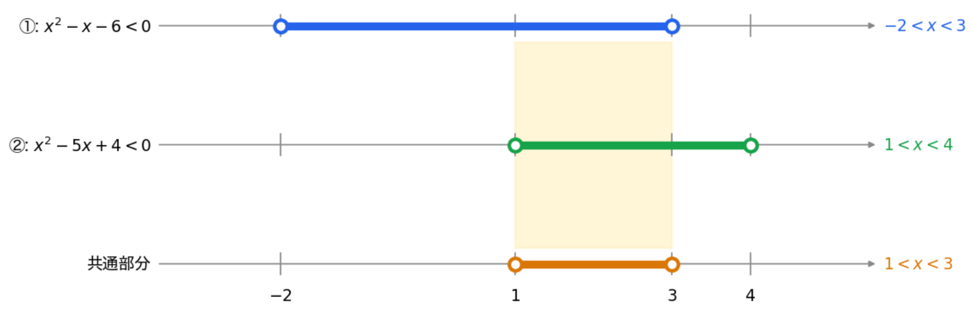
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases}$$

解法の流れ

- 不等式 ① を単独で解き、解 $-2 < x < 3$ を求める
- 不等式 ② を単独で解き、解 $1 < x < 4$ を求める
- 2 つの解の共通部分（数直線上で重なる範囲）を読み取る

方針

連立不等式は「各不等式を別々に解いてから共通部分を取る」という手順で解く。それぞれは基本の問題と同じ方法（因数分解 → 根 → 内外の読み取り）で解ける。最後に数直線上で 2 つの解の重なりを確認する。方針の図で共通部分を視覚的に確認してから答案に入る。



模範解答

【① を解く手順】
$a > 0,\ f < 0$ なので根の内側が解。因数分解で根 $x = -2, 3$ を特定し、内側の範囲を読み取る。

不等式 ①：$x^2 - x - 6 < 0$
$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ であるから、根（解）は $x = -2, 3$。
二次係数 $a = 1 > 0$ より根の内側が解：

$$-2 < x < 3 \quad \cdots ① \text{ の解}$$

【② を解く手順】
① と同様に因数分解して根を特定し、$a > 0,\ f < 0$ より根の内側を解とする。

不等式 ②：$x^2 - 5x + 4 < 0$
$x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ であるから、根（解）は $x = 1, 4$。
$a = 1 > 0$ より根の内側が解：

$$1 < x < 4 \quad \cdots ② \text{ の解}$$

【共通部分の読み取り方】
① の右端は $x = 3$（除く）、② の左端は $x = 1$（除く）。2 つの開区間が重なる部分は端点を除いて $1 < x < 3$。方針の図で数直線上の重なりを視覚的に確認できる。

① の解 $-2 < x < 3$ と ② の解 $1 < x < 4$ の共通部分を取る。
よって、連立不等式の解は

$$1 < x < 3$$