二次関数のグラフと直線

統合教材パック（全 3 問）

このパックで身につけること

- 放物線と直線を連立した 2 次方程式の判別式で、共有点の個数（0・1・2 個）を判定できる
- 連立方程式を解いて共有点の座標を求めるプロセスを説明できる
- 放物線と直線の 2 交点と原点を 3 頂点とする三角形の面積を、座標の公式 $S = \dfrac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$ で求められる

収録問題

問題	内容	難易度
問 1：共有点の個数	$y = x^2$ と $y = x + k$ の共有点の個数を k で場合分け	標準
問 2：共有点の座標	$y = x^2$ と $y = 2x + 3$ の共有点の座標を求める	標準
問 3：三角形の面積	$y = x^2$ と $y = 2x + 3$ の 2 交点と原点を頂点とする三角形の面積を求める	標準

使い方

1.「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその手順か」を言語化する

3 問を通して「判別式 → 座標 → 三角形面積」という放物線と直線の交わりの 3 段階を習得できる構成になっている。

統合教材：二次関数のグラフと直線（共有点の個数）

統合教材

トピック: 二次関数のグラフと直線難易度: 標準

問題

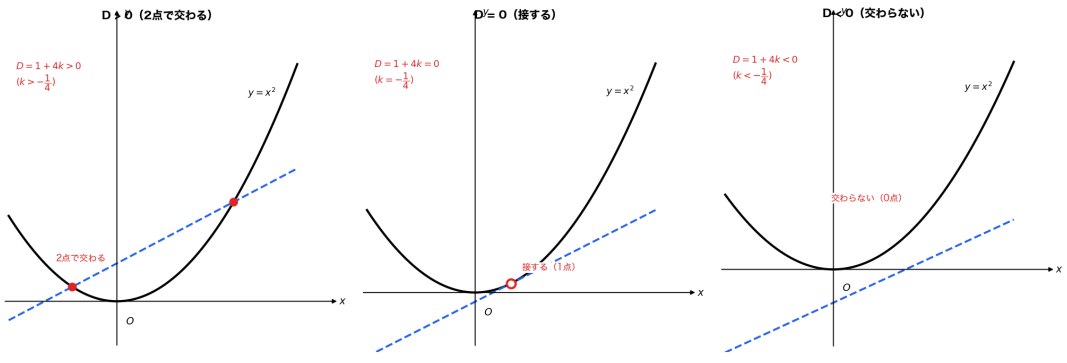
放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + k$（k は定数）の共有点の個数を、k の値によって場合分けせよ。

解法の流れ

- 2 式を連立して $x^2 - x - k = 0$ を導く
- 判別式 $D = 1 + 4k$ の符号で共有点の個数が決まる
- $D > 0$（2 個）・$D = 0$（1 個・接する）・$D < 0$（0 個）に場合分けする

方針

放物線と直線の交点の x 座標は連立方程式の解であり、「実数解の個数＝共有点の個数」となる。2 次方程式 $x^2 - x - k = 0$ の判別式 $D = 1 + 4k$ の符号を調べれば、
(k
) の値域に応じて共有点の個数が一意に決まる。



模範解答

【なぜ判別式で個数がわかるか】
交点の x 座標は方程式の実数解そのもの。$D > 0$ なら解が 2 つ（2 交点）、$D = 0$ なら重解（接点・直線が接する）、$D < 0$ なら実数解なし（交点なし）。
【接するとき（$D = 0$）の接点】
$k = -\frac{1}{4}$ のとき $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \to \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \to x = \frac{1}{2}$、$y = \frac{1}{4}$
接点は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

2 式を連立すると

$$x^2 = x + k$$
$$x^2 - x - k = 0$$

判別式は

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) = 1 + 4k$$

よって

$$\begin{cases} D > 0 \left(k > -\frac{1}{4}\right) & \text{共有点 2 個} \\ D = 0 \left(k = -\frac{1}{4}\right) & \text{共有点 1 個（接する）} \\ D < 0 \left(k < -\frac{1}{4}\right) & \text{共有点 0 個} \end{cases}$$

統合教材：二次関数のグラフと直線（共有点の座標）

統合教材

トピック: 二次関数のグラフと直線難易度: 標準

問題

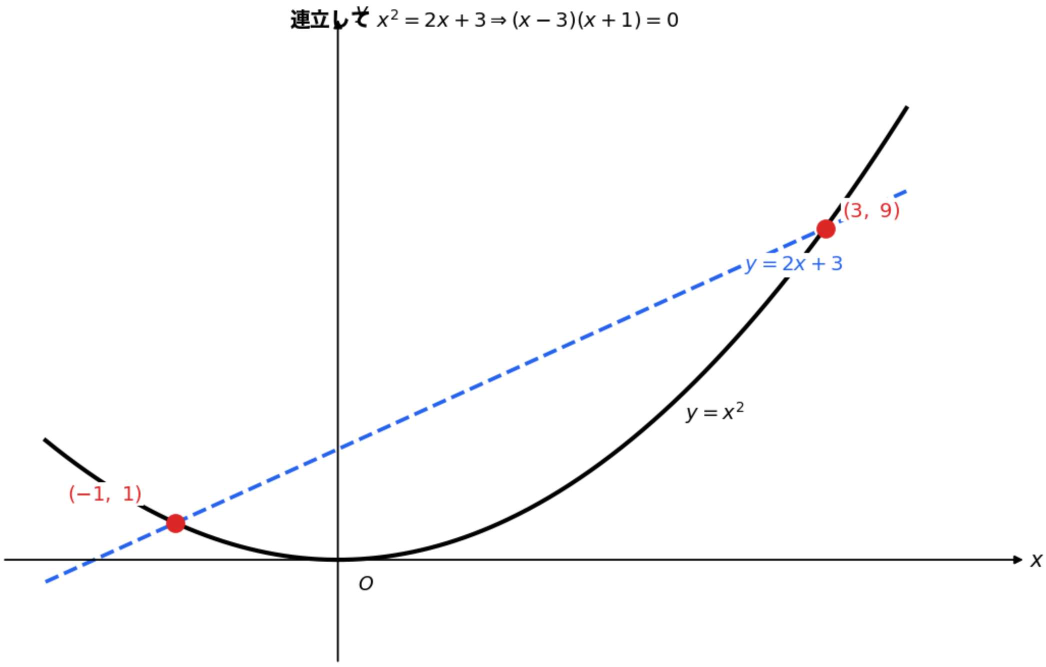
放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の共有点の座標をすべて求めよ。

解法の流れ

- 2 式を連立して $x^2 - 2x - 3 = 0$ にまとめる
- 因数分解して x の値を求める
- それぞれの y 座標を代入して共有点の座標を確定する

方針

共有点の x 座標は「両式で y が等しくなる値」なので、連立方程式 $x^2 = 2x + 3$ を立てる。整理した二次方程式を解いて x を求め、どちらかの式に代入して y を求めれば座標が確定する。



模範解答

【連立の手順】
「共有点の x 座標 = 両式の y が等しくなる x」なので y を消去して一本の方程式にする。
【y の代入先はどちらでも同じ】
$y = x^2$ でも $y = 2x + 3$ でも同じ y が出る（交点なので）。計算が簡単な方を選べばよい。
【確認】
$(-1, 1)$: $2(-1) + 3 = 1$ ✓
$(3, 9)$: $2(3) + 3 = 9$ ✓

2 式を連立すると

$$x^2 = 2x + 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

$$x = 3 \quad \text{または} \quad x = -1$$

$y = x^2$ に代入すると
$x = 3$ のとき $y = 9$
$x = -1$ のとき $y = 1$

$$\therefore \text{共有点は} \quad (-1,\,1) \quad \text{と} \quad (3,\,9)$$

統合教材：二次関数のグラフと直線（2 交点と原点の三角形）

統合教材

トピック: 二次関数のグラフと直線難易度: 標準

問題

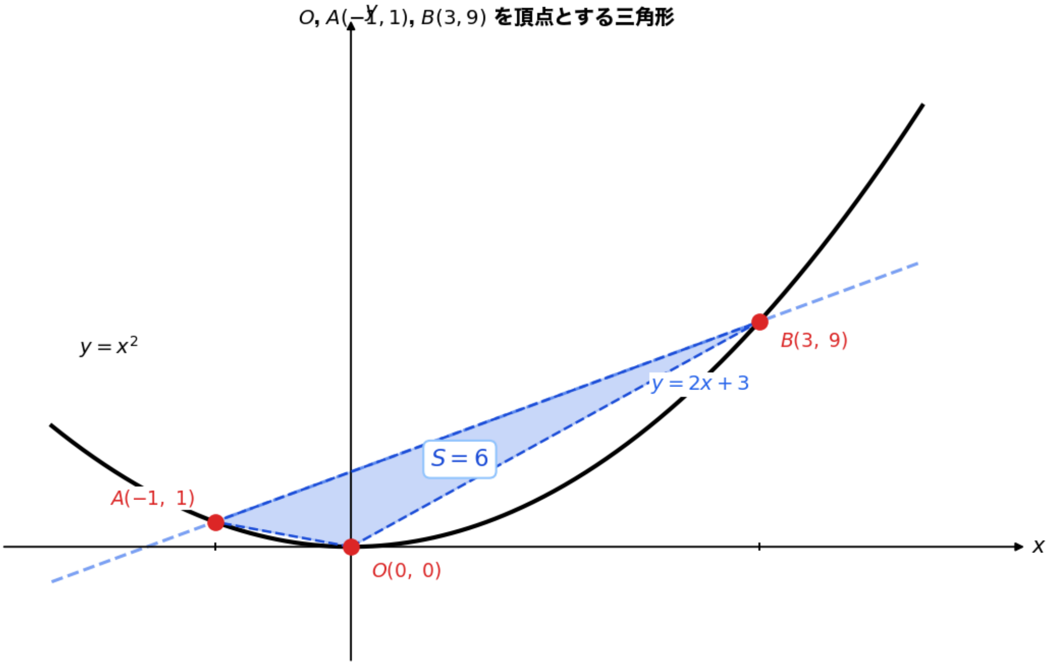
放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 2x + 3$ の 2 つの共有点および原点を 3 頂点とする三角形の面積を求めよ。

解法の流れ

- 2 式を連立して $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解き、共有点 $A(-1,\ 1)$、$B(3,\ 9)$ を求める
- 原点 $O(0,\ 0)$、$A(-1,\ 1)$、$B(3,\ 9)$ を 3 頂点とする三角形の面積を計算する
- 公式 $S = \dfrac{1}{2}\,|x_A y_B - x_B y_A|$ を適用する

方針

共有点の座標は連立方程式を解けば求まる（記事 2 と同じ手順）。面積は「原点 O と 2 点 A, B を頂点とする三角形の面積公式」$S = \dfrac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$ を使う。代入するだけで値が確定する。


O, $A(-1, 1)$, $B(3, 9)$ を頂点とする三角形
y
x
$y = x^2$
$B(3,\ 9)$
$y = 2x + 3$
$S = 6$
$A(-1,\ 1)$
$O(0,\ 0)$

模範解答

【共有点の確認】
$x=-1$: 直線 $y=2(-1)+3=1$ ✓
$x=3$: 直線 $y=2(3)+3=9$ ✓
【面積公式の意味】
原点 O と 2 点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$ を頂点とする三角形の面積：

$$S=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$$

$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ が張る平行四辺形の面積の半分に等しい。
【計算の確認】
$(-1)(9)=-9$、$(3)(1)=3$
$|-9-3|=12\to S=6$ ✓

2 式を連立すると $x^2=2x+3$ より

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1,\quad x=3$$

$y=x^2$ に代入すると

$$A(-1,\ 1),\quad B(3,\ 9)$$

原点 $O(0,\ 0)$、$A(-1,\ 1)$、$B(3,\ 9)$ を頂点とする三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}\left|x_Ay_B-x_By_A\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(-1)(9)-(3)(1)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\times 12$$

$$\therefore S=6$$