二次関数の式の決定

統合教材パック（全 3 問）

このパックで身につけること

- 「3 点を通る」「頂点・軸が与えられる」「2 つの解がわかる」のどの条件で、どの式の形を使うかを判断できる
- 一般形・頂点形・因数形それぞれの「未知数の数」と「条件の数」の対応を説明できる
- 条件に合った形を選ぶことで、連立方程式の計算量を最小化できる

収録問題

問題	内容	難易度
問 1：一般形	3 点 $(0,3),(1,0),(2,1)$ を通る放物線	標準
問 2：頂点形	頂点 $(-1,2)$ と 1 点 / 軸 $x=1$ と 2 点	標準
問 3：因数形	$x=1, x=3$ を解にもち点 $(0,6)$ を通る放物線	標準

使い方

1. 「解法の流れ」を読み、問題を自力で解いてみる
2. 模範解答（左段）と照合し、答案の書き方を確認する
3. 意味説明（右段）で「なぜその形を使うのか」を言語化する

3 問を通して「一般形・頂点形・因数形」の使い分けを習得できる構成になっている。問 2 は 1 問の中に 2 つのパターン（頂点 +1 点 / 軸 +2 点）を含む。

統合教材：二次関数の式の決定（3 点を通るとき）

統合教材

トピック: 二次関数の式の決定難易度: 標準

問題

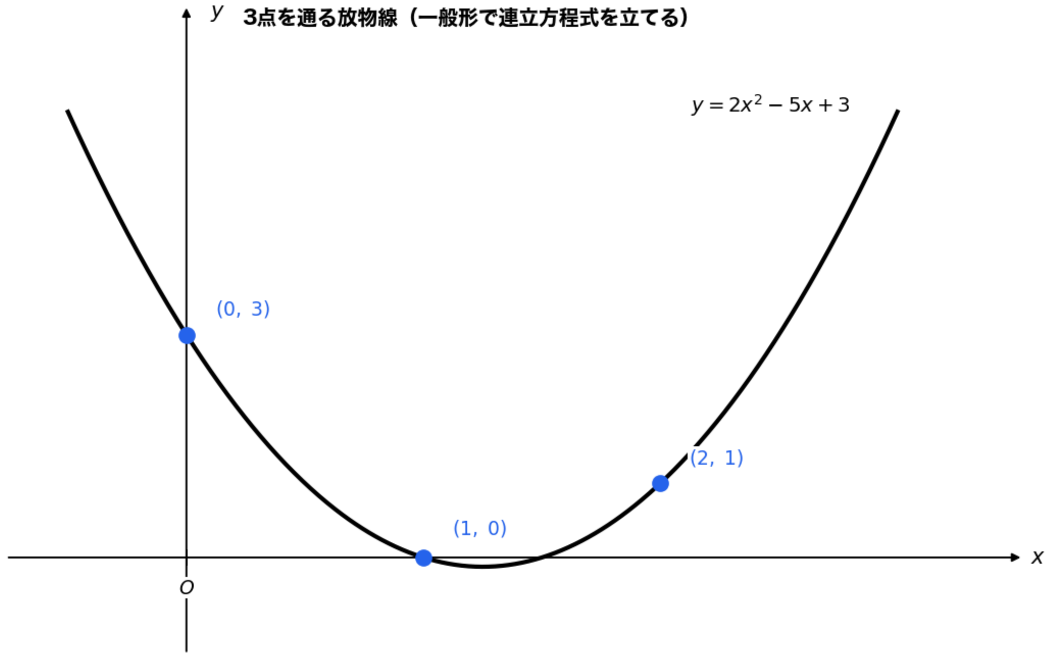
3 点 (0, 3)、(1, 0)、(2, 1) を通る放物線の式を求めよ。

解法の流れ

- 一般形 $y = ax^2 + bx + c$ を立てる（頂点・軸・解の情報がないため）
- 3 点を代入して 3 元連立方程式を作る
- $x = 0$ の点で c を先に決め、残り 2 式で a, b を求める

方針

「頂点」も「軸」も「解」も与えられていないときは一般形 $y = ax^2 + bx + c$ が最適。定数が 3 つあり、通る点が 3 つある。各点を代入するたびに 1 本の方程式が得られるので、3 点から a, b, c を一意に決定できる。特に $x = 0$ を代入すると c が瞬時に求まり、以降の計算が楽になる。



模範解答

$y = ax^2 + bx + c$ とおく。

【なぜ一般形か】
頂点・軸・解の情報がなく、座標だけが3つある。この状況で定数 a, b, c の3つを決めるには、「3つの条件で3つの未知数を求める」一般形が最もシンプル。
【c を先に決める理由】
$x = 0$ の点を先に代入すれば $y = c$ だけになる。これで c が先に確定し、①②は a, b だけの2元連立方程式に簡略化される。
【確認】

- $x = 0$: 3 ✓
- $x = 1$: $2 - 5 + 3 = 0$ ✓
- $x = 2$: $8 - 10 + 3 = 1$ ✓

(0, 3) を代入:

$$3 = c \implies c = 3$$

(1, 0) を代入:

$$0 = a + b + 3 \implies a + b = -3 \quad \cdots ①$$

(2, 1) を代入:

$$1 = 4a + 2b + 3 \implies 2a + b = -1 \quad \cdots ②$$

② − ① より $a = 2$。① から $b = -5$。

$$\therefore\ y = 2x^2 - 5x + 3$$

統合教材：二次関数の式の決定（頂点と 1 点・軸と 2 点）

統合教材

トピック: 二次関数の式の決定難易度: 標準

問題

（1）頂点が $(-1,\ 2)$ で、点 $(1,\ 10)$ を通る放物線の式を求めよ。

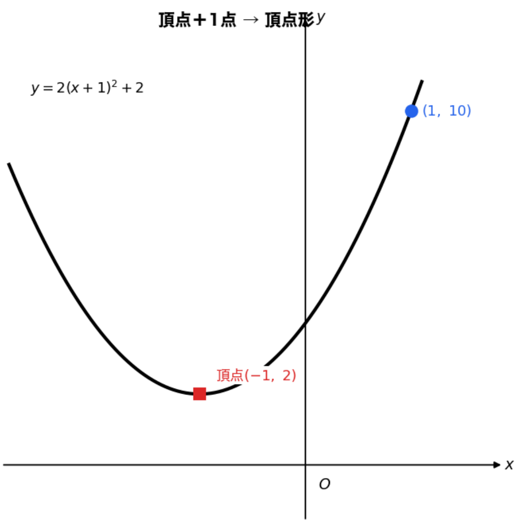
（2）軸が $x=1$、点 $(0,\ -1)$ と $(3,\ 5)$ を通る放物線の式を求めよ。

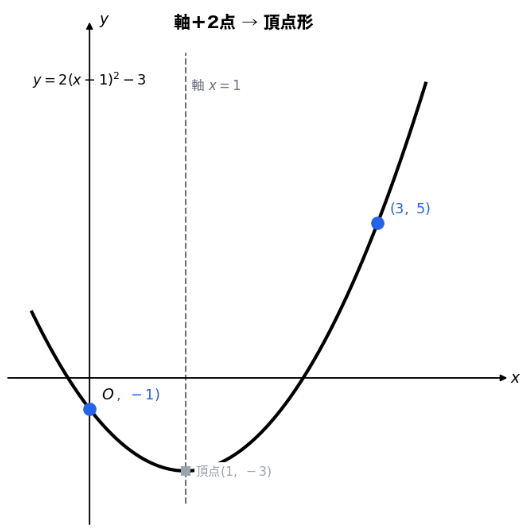
解法の流れ

- 頂点形 $y=a(x-p)^2+q$ を用いる（頂点・軸の情報がある）
- （1）頂点から p,q が確定 → 1 点を代入して a を求める
- （2）軸から p が確定 → 2 点を代入して a,q を連立で求める

方針

頂点や軸の情報がある場合は頂点形 $y=a(x-p)^2+q$ が最適。（1）では頂点 (p,q) が直接与えられるので p,q を代入した後は a だけが未知数。1 点で a が決まる。（2）では軸 $x=p$ が与えられるので p が確定する。残り a,q は 2 点 2 式の連立方程式で求める。





模範解答

【頂点がわかるときの利点】
頂点形 $a(x-p)^2+q$ の p, q は頂点座標そのもの。頂点がわかった瞬間に p, q が確定し、未知数は a だけになる。
残り 1 点を代入すれば a が即座に求まる。一般形の 3 元連立方程式より大幅に計算量が減る。

(1) 頂点と 1 点

頂点が $(-1,\ 2)$ なので

$$y = a(x+1)^2 + 2$$

点 $(1,\ 10)$ を代入:

$$10 = a(1+1)^2 + 2 = 4a + 2$$
$$4a = 8 \implies a = 2$$

$$\therefore\ y = 2(x+1)^2 + 2 = 2x^2 + 4x + 4$$

【軸がわかるときの利点】
軸 $x=p$ は頂点の x 座標と同じ。軸がわかれば p が確定し、未知数は a と q の 2 つになる。
2 点から 2 式を作り、引き算すれば a が求まる。一般形よりシンプルな連立。
【確認】

- $x=0$: $2(1)-3=-1$ ✓
- $x=3$: $2(4)-3=5$ ✓

(2) 軸と 2 点

軸が $x=1$ なので $p=1$ が確定する。

$$y=a(x-1)^2+q$$

$(0,\ -1)$ を代入:

$$-1=a+q \quad \cdots ①$$

$(3,\ 5)$ を代入:

$$5=4a+q \quad \cdots ②$$

② − ① より $3a=6 \implies a=2$。
① から $q=-1-2=-3$。

$$\therefore\ y=2(x-1)^2-3=2x^2-4x-1$$

統合教材：二次関数の式の決定（2 つの解から決めるとき）

統合教材

トピック: 二次関数の式の決定難易度: 標準

問題

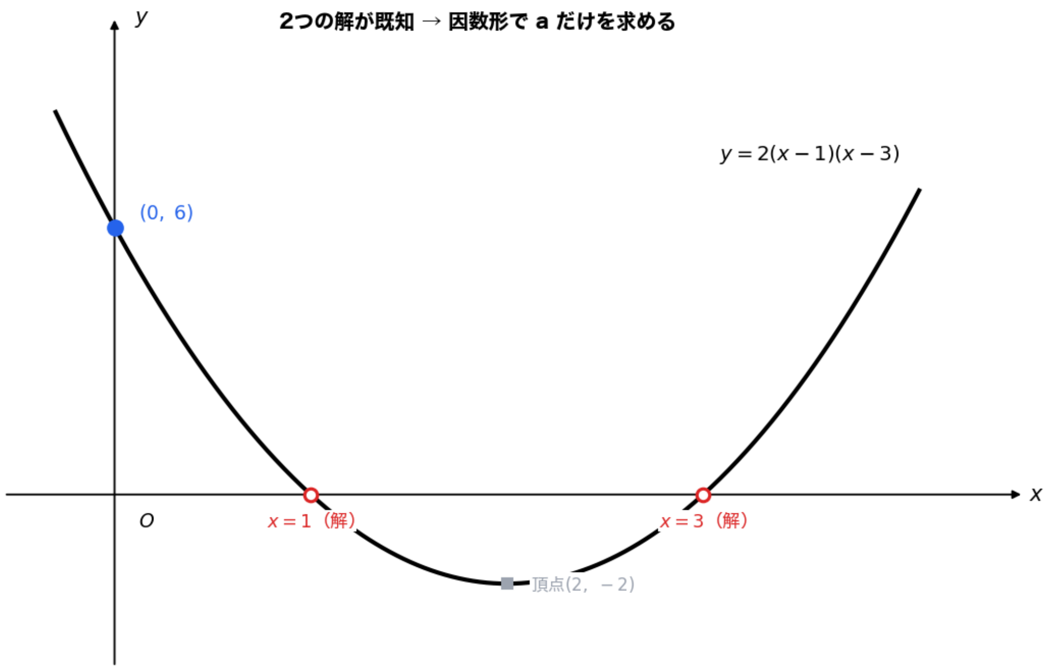
$x = 1$ と $x = 3$ を解にもち、点 $(0,\ 6)$ を通る放物線の式を求めよ。

解法の流れ

- 因数形 $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ を用いる（解が 2 つ既知）
- $\alpha = 1,\ \beta = 3$ を代入して a 以外を確定させる
- 通る点を代入して a を求める

方針

二次方程式 $f(x) = 0$ の 2 解が $x = \alpha, \beta$ であることは、$f(x)$ が $(x-\alpha)(x-\beta)$ を因数にもつことと同値。よって $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおけば α, β は最初から確定しており、未知数は a だけ。1 点を代入するだけで式が決まる。


2つの解が既知 → 因数形で a だけを求める
y
x
O
y = 2(x − 1)(x − 3)
(0, 6)
x = 1（解）
x = 3（解）
頂点(2, −2)

模範解答

$x = 1, x = 3$ を解にもつので

$$y = a(x-1)(x-3)$$

とおく。点 $(0,\ 6)$ を通ることから:

$$6 = a(0-1)(0-3) = 3a$$
$$\implies a = 2$$

$$\therefore\ y = 2(x-1)(x-3) = 2x^2 - 8x + 6$$

【因数形を使う理由】
解が $x = 1, 3$ とわかった瞬間に $(x-1)(x-3)$ という因数が確定する。一般形で立てると a, b, c の 3 元連立が必要だが、因数形なら a だけを求めればよい。

【確認】
- $x = 1$: $2 \cdot 0 \cdot (-2) = 0$ ✓（解）
- $x = 3$: $2 \cdot 2 \cdot 0 = 0$ ✓（解）
- $x = 0$: $2(-1)(-3) = 6$ ✓

【3 形式の比較】

条件	形式	未知数
3 点	一般形	3 個
頂点・軸	頂点形	1〜2 個
2 解	因数形	1 個